



TITLE:

Property Pを持つKnotのある特別なClassについて (Knotting problemについて)

AUTHOR(S):

中川, 洋子

CITATION:

中川, 洋子. Property Pを持つKnotのある特別なClassについて (Knotting problemについて). 数理解析研究所講究録 1974, 219: 19-27

ISSUE DATE:

1974-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105309>

RIGHT:

Property P を持つ knot の ある特別な class について

神戸大 中川 洋子

§ 1. knot に張られる singular disk の一意性

"Schlingknoten" [8] で Seifert は doubled knot [12] に対して singular disk の一意性を証明した。

doubled knot だけでなく、一般にある条件を満たす knot に対して spanning singular disk の一意性が同様に証明される。[5]

そのためにまず以下の様子をいくつかの定義が必要である。

- S^3 の singular disk とは oriented disk \bar{D} から S^3 の中への連続写像 f のことである。簡約のためにその像 $D = f(\bar{D})$ を singular disk と呼ぶ。
- S^3 の 2 つの singular disk $f, h: \bar{D} \rightarrow S^3$ が same type とは $D = f(\bar{D})$ から $D' = h(\bar{D})$ への同型 θ が存在して $\theta f = h$ を満たす。

- S^3 の 2 つの singular disk $f, h: \bar{D} \rightarrow S^3$ が equivalent とは S^3 の ambient isotopy $\omega_t (0 \leq t \leq 1)$ が存在して

$$\omega_0 f = f, \quad \omega_1 f = h,$$

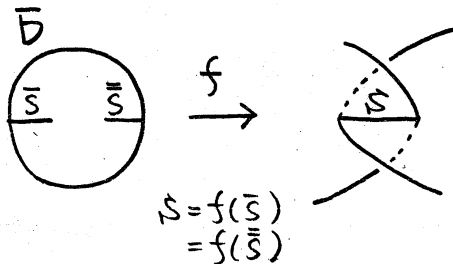
$$\omega_t(k) = k \quad (k = \partial D = \partial D')$$

なるときである。

注) disk, equivalences は全て semilinear category で考えることとする。disk を一般の位置に置くことにより、singularity は有限個の double line と triple point だけである。

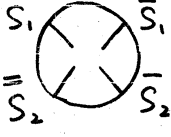
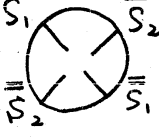
従って、 $f|_{\partial D}: \partial D \rightarrow \partial D$ は常に同型となる。

- clasp singularity 或いは単に clasp とは disk の singularity のうちで最も簡単なものを言う。図の様に clasp の逆像は 2 つの交わらない \bar{D} の slit から成っている。



- elementary disk とは singularity が clasp だけから成る singular disk である。

Smythe [10] の結果から全ての singular disk は elementary disk に変形可能であることが解る。

元) elementary disk の type は \bar{D} に於る slit の順序で決まる. 例えば \bar{S}_1  と \bar{S}_1  とは異なる type である.

今、 W を S^3 に於ける D の regular neighborhood とすると、 W は g 個 ($g = \text{clasp の数}$) の handle を持つ handlebody になっており W の boundary ∂W は genus g の closed surface である.

D が totally knotted と呼ばれるのは ∂W が $S^3 - \partial D$ で incompressible のとき、即ち $\pi_1(\partial W)$ から $\pi_1(S^3 - \partial D)$ への induced map が mono. であるとき.

定理 D と D^* を $\partial D = \partial D^* (= \mathbb{R})$ なる same type の elementary disk とする. もし D が totally knotted であるならば、 D と D^* は equivalent である.

(証明の概略) D が totally knotted ならば S^3 から S^3 への同型で $\mathcal{G}_1(D^*) \subset W$ とする様な写像 \mathcal{G}_1 の存在が云える.

次にもしも D^* が W に含まれているから W から W への同型で

$$\mathcal{G}_2|_{\partial W} = \text{identity}$$

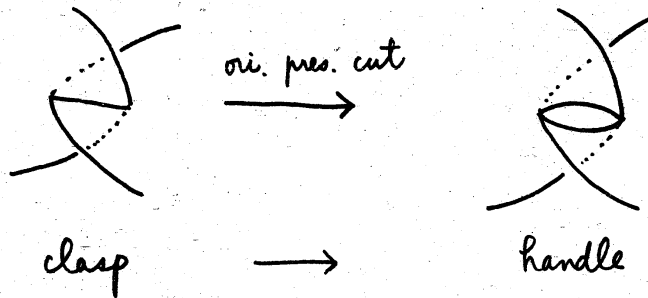
$$\mathcal{G}_2(D^*) = D$$

を満らす写像 \mathcal{G}_2 の存在が云える.

このとき、 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ 共に集合として \mathbb{R} を動かさず、様に

よめる. $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$ 求める同型写像になっている.

§ 2. clasp の数と genus



上図の様に *orientation preserving cut* [7] によって *clasp* を *handle* に変えることが出来る. 即ち,

定理 genus g と *clasp* の数 λ の間には次の様な不等式が成り立つ: $\lambda \geq g$.

注) *prezel knot* で *doubled knot* でないものは, $\lambda \neq g (=1)$ である.

doubled knot でない *prezel knot* の存在は云える.

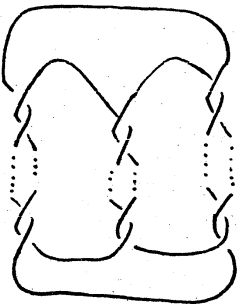
今、 k を *doubled knot* とする. *Seifert surface* を *canonical form* [2] に直す. *coefficient matrix* C は

$$C \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -1 & l \end{pmatrix} \quad (\varepsilon = \pm 1, l = \text{整数})$$

である. このことを使って次が云える.

定理 Alexander 多項式が $\Delta_k(t) = nt^2 - (2n - \varepsilon)t + n$ ($n > 0$, $\varepsilon = \pm 1$) である genus 1 の knot が doubled knot であるためには knot k の coefficient matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ が次を満たさなければならない。

$$\textcircled{*} \begin{cases} \alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon n \\ \alpha + \delta = \pm(n + \varepsilon) \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = \pm 1 \pm(n + \varepsilon) \end{cases}$$



$2p+1$ $2q+1$ $2r+1$

p	$n-1$	1	n	-1	n	-2	$-n-1$	0	$-n-1$	-1	$-n$	1	$-n$
q	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
r	-2	n	1	n	-1	$-n-1$	-2	$-n-1$	0	$-n$	-1	$-n$	1

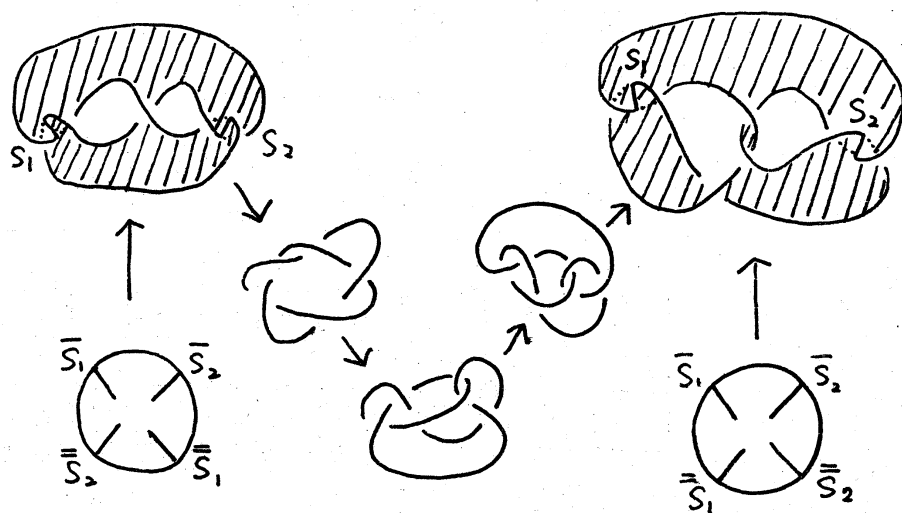
prezel knot が $\textcircled{*}$ の条件を満たすのは上の表にある (p, q, r) 個の交点を持つ場合だけで、これらは簡単な変形によって doubled knot であることが解る。

もしも $\lambda = q$ ならば λ は与えられた knot を張る elementary disk の clasp の最小数である。

- D が minimal とは、 $k = \partial D$ が D の clasp の数よりも小さい数の clasp を持つ elementary disk を bound しないとき。

定理 エつの異なる type の *minimal elementary disk* を bound する *knot* が存在する.

(証明) 例えば S_1 がそうである.



§ 3. *Property P* を持つ *knot* のある特別な class

今, $n=2$ の場合のみ考える (このときエつの *disk type* しかない). 更に D が *totally knotted* であれば $\partial D = k$ は *Property P* ([1], [3], [4], [9]) を持つ. 即ち,

定理 *totally knotted* な *clasp* の数が 2 である *elementary disk* の *boundary* に *equivalent* な *knot* k は *Property P* を持つ.

この定理を証明するためには、条件を満たす *knot* k を用いて作った *homology sphere* M (*trivial* なものは除く) が

simply connected であることは云えば十分である。

V を S^3 に於る k の regular neighborhood とする。

$$M \cong (S^3 - \text{int } V) \cup_g S^1 \times D^2$$

g は torus $S^1 \times \partial D^2$ から torus ∂V への同型写像で $S^1 \times \partial D^2$ の meridian を ∂V の meridian である simple closed curve に写すものとする。

$$M \cong (S^3 - \text{int } W) \cup ((W - \text{int } V) \cup_g S^1 \times D^2)$$

と分けておき、

$$M \cong M_1 \cup M_2 \quad \text{とする。}$$

定理 上の様な homology sphere M は simply connected である。 ([6])

(証明の概略) Van Kampen の定理により $\pi_1(\partial W) \rightarrow \pi_1(M_2)$

が mono. であれば

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) *_{\pi_1(\partial W)} \pi_1(M_2)$$

となつて $\pi_1(M) \neq \{1\}$ であることが解る。

今、 $\pi_1(\partial W) \rightarrow \pi_1(M_2)$ が mono であることを

仮定する。 Dehn の Lemma [7] と Loop Theorem [11] によつて

$$M_2 = X_1 \cup X_2, \quad g(X_i) = 1 \quad (i=1, 2)$$

$$X_1 \cap X_2 = \text{non-singular disk}$$

なる様に M_2 が分解される。再び Van Kampen の定理により

$$\pi_1(M_2) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2).$$

$\pi_1(M_2)$ に対する Alexander polynomial を考えると, Σ 変数の多項式でしかも $p(g_1) \cdot q(g_2)$ に因数分解されることが解る.
(g_1, g_2 は $\pi_1(X_1), \pi_1(X_2)$ のアーベル化群の生成元)

実際に $\pi_1(M_2)$ の Alexander polynomial を計算すると, Σ の因数に分解出来ないことが解る.

従って, 最初に $\pi_1(2W) \rightarrow \pi_1(M_2)$ が mono. ではないとした仮定が誤りであったことが解る.

(以上)

参考文献

- [1] Bing, R.H. and Martin, J.M., "Cubes with knotted holes," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 155, 1971.
- [2] Fox, R.H., "A Quick Trip Through Knot Theory," Topology of 3-Manifold and Related Topics, Prentice Hall, 1961.
- [3] Gonzalez-Acuna, F., "Dehn's Construction of Knots," Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 15, 1970.
- [4] Hemple, J., "A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15, 1964.
- [5] Nakagawa, Y., "Singular Disks and Their Equivalences," Dissertation, Princeton University, 1973.
- [6] _____, "A New Class of Knots with Property P," (to appear).
- [7] Papakyriakopoulos, C.D., "On Dehn's Lemma and the Asphericity of Knots," Ann. of Math., vol. 66, 1957.
- [8] Seifert, H., "Schlingknoten," Math. Z., vol. 52, 1949.
- [9] Simon, J., "Some classes of knots with property P," Topology of Manifolds, Markham, 1970.

- [10] Smythe, N. "Handlebodies in 3-Manifolds," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 26, 1970.
- [11] Stallings, J., "On the Loop Theorem," Ann. of Math., vol. 72, 1960.
- [12] Whitehead, J.H.C., "On Doubled Knots," Journal of the London Math. Soc., vol. 12, 1937.